

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记16——定积分的应用1（对数与面积）

在对数上的应用

解微分方程 $L'(x) = 1/x$ ，直接用积分法求解，得到 $L(x) = \ln x$ ；用微积分第二基本定理，可直接写作：

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

如果我们把这个函数作为对数的定义，就可以很容易地解释对数的性质。

构图

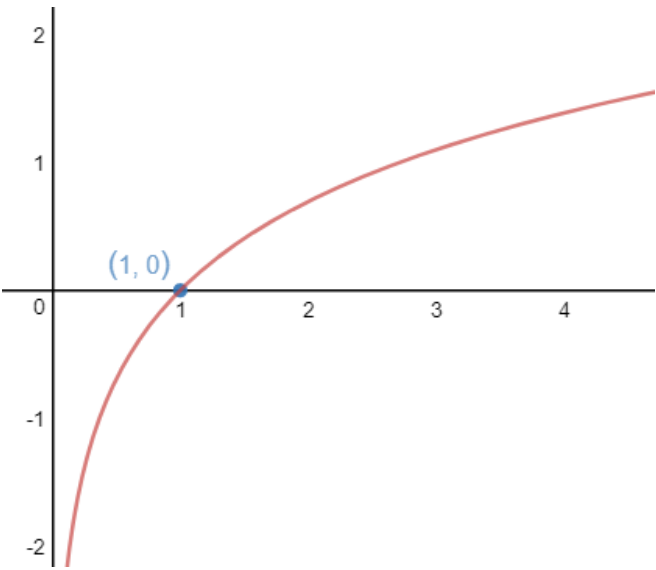
本例可以得到几个性质：

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad L(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

$$L''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$L(1) = 0$ ，在该点的斜率 $L'(1) = 1$ ； $L'(x) = 1/x$ ，在 $x > 0$ 时 $L'(x) > 0$ ，说明 $L(x)$ 在 $x > 0$ 上是递增的； $L''(x) = -1/x^2 < 0$ ，说明 $L(x)$ 是凹函数， L' 递减，即 L 的切线斜率递减，现在根据这几个性质作图（可参考[数学笔记7——曲线构图](#)）：



实际上， $L(x)$ 将会和 $y=1$ 相交于点 $(e, 1)$ ， e 就是使 $L(x) = 1$ 时 x 的值：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

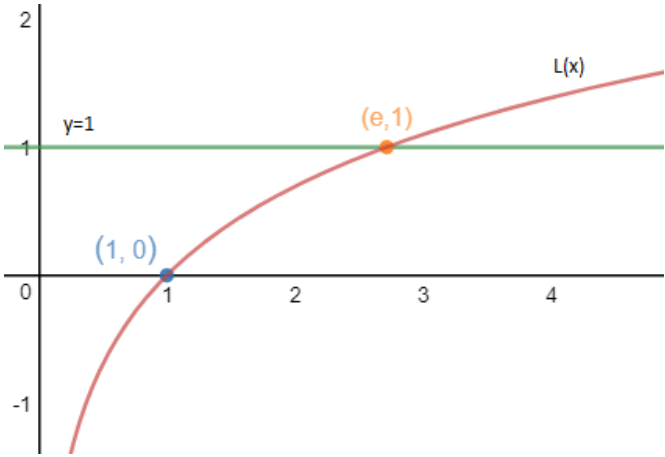
- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



$L(ab) = L(a) + L(b)$

我们尝试用微积分表示法解释 $L(ab) = L(a) + L(b)$

这是对数的基本运算公式之一， $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ，如果用微积分作为对数的定义，则：

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t}, \quad \ln(a) = \int_1^a \frac{dt}{t}, \quad \ln(b) = \int_1^b \frac{dt}{t}$$

结合定积分的性质：

$$\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$$

这样问题就转换成了如何证明 $\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{dt}{t}$

这个证明需要一个称为变量替换法的技巧，通过该方法巧妙地给出证明。

可以将积分的上下限看成b和1放缩了a倍：

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_{1 \times a}^{b \times a} \frac{dt}{t}$$

令 $t = au$ ，无穷小量 $dt = dau = adu$ ，即 du 放缩了a倍：

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{dau}{au} = \int_1^b \frac{adu}{au}$$

下限，当 $t = a$ 时， $L(a) = 1/a = 1/au$ ，故 $t = a$ 时， $u = 1$ ；

上限，当 $t = ab$ 时， $L(ab) = 1/ab = 1/au$ ，故 $t = ab$ 时， $u = b$

由此知道了转换后的积分上下限：

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{adu}{au} = \int_1^b \frac{du}{u}$$
$$\int_1^b \frac{du}{u} = L(b), \quad \int_1^b \frac{dt}{t} = L(b)$$

问题得证。

$L(1/a) = -L(a)$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(Ax) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

这是对数的另一个基本运算公式， $\ln(1/a) = -\ln(a)$

如果 $L(1/a) = -L(a)$ 成立，那么有

$$\int_1^{1/a} \frac{dt}{t} = - \int_1^a \frac{dt}{t} = \int_a^1 \frac{dt}{t}$$

令 $t = u/a$ ，无穷小量 $dt = du/a$ ，即 du 放缩了 $1/a$ 倍：

下限，当 $t = 1$ 时， $L(1) = 1 = 1/(u/a) = a/u$ ，故 $t = 1$ 时， $u = a$ ；

上限，当 $t = 1/a$ 时， $L(1/a) = a = a/u$ ，故 $t = 1/a$ 时， $u = 1$

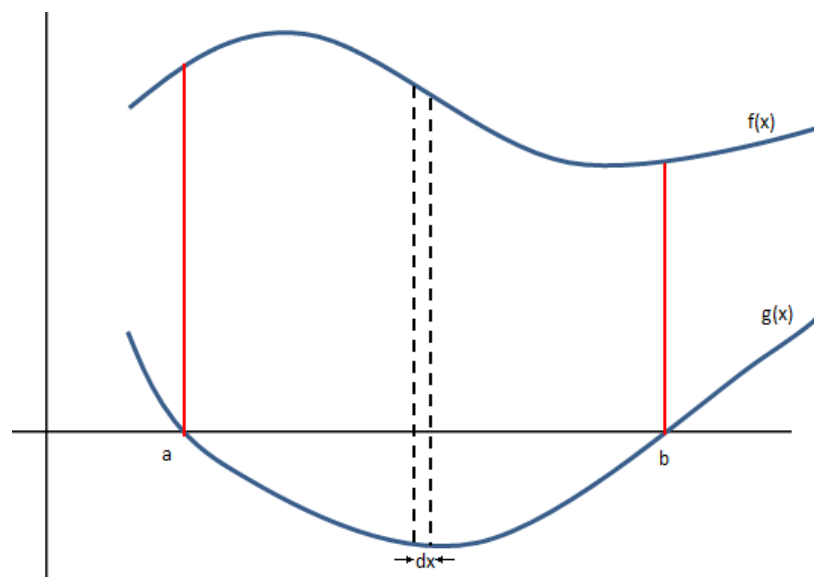
由此知道了转换后的积分上下限：

$$\int_1^{1/a} \frac{dt}{t} = \int_a^1 \frac{du/a}{u/a} = \int_a^1 \frac{du}{u} = \int_a^1 \frac{du}{u} = \int_a^1 \frac{dt}{t}$$

问题得证。

在几何上的应用

定积分可用来求得两条曲线间的面积，如下图所示，求 $g(x)$ 和 $f(x)$ 在 a ， b 之间围成的面积：



我们将待求面积切割成小矩形，矩形的宽度是 dx ，高度 $\approx f(x) - g(x)$ ，所以所求面积：

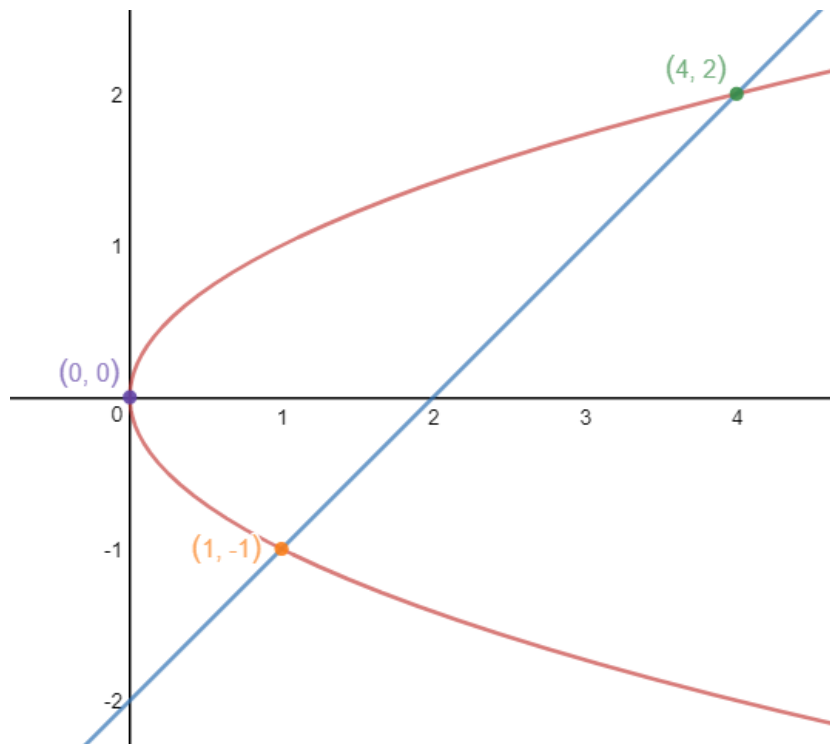
$$\text{Area} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$a, b, f(x), g(x)$ 代表了图形的四个边界，知道这些边界就可以确定面积，也就是求得定积分的值。这些条件都是必须的，如果漏掉上限或下限，就不知道左右边界，如果连边界都不知道，如何求出面积？同理不能漏掉 $f(x)$ 和 $g(x)$ ，它们代表了上下边界。

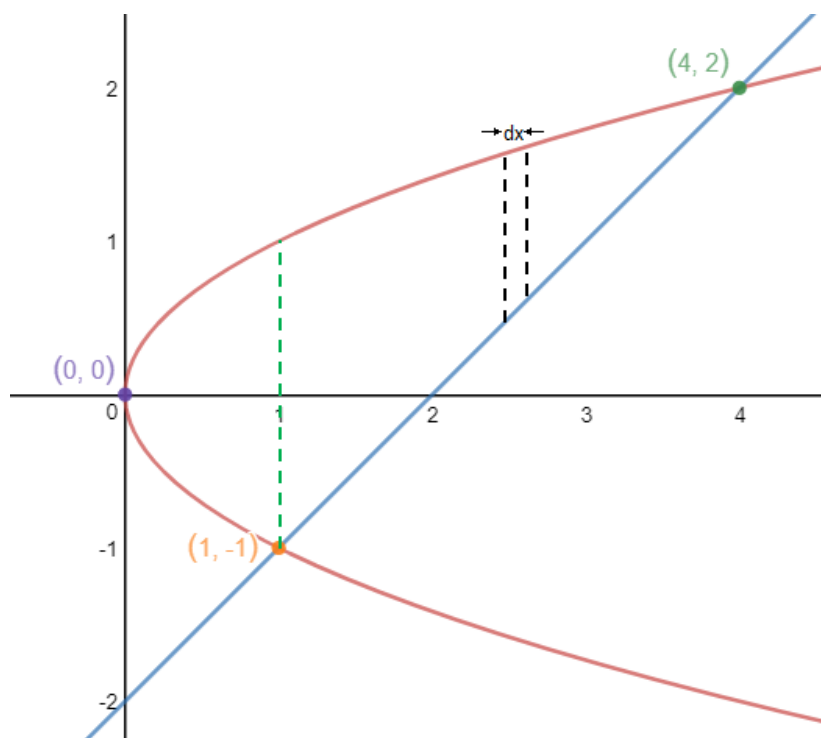
示例1

求曲线 $x = y^2$ 和 $y = x - 2$ 围成的面积。

很容易求得两条曲线的交点是 $(4, 2)$ 和 $(1, -1)$ ，图形如下：



首先想到利用前面的公式计算面积，但问题在这里似乎没那么简单。当我们纵向切割矩形时，发现矩形并不总是由 $x = y^2$ 和 $y = x - 2$ 围成；在 $x < 1$ 时，仅由 $x = y^2$ 围成，如下图所示：



上图的绿色虚线将面积分为左右两块。

首先将 $x = y^2$ 转换为 x 的函数：

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & y > 0 \\ -\sqrt{x}, & y < 0 \end{cases}$$

右侧的面积实际是由 $y = x^{1/2}$ 和 $y = x - 2$ 围成：

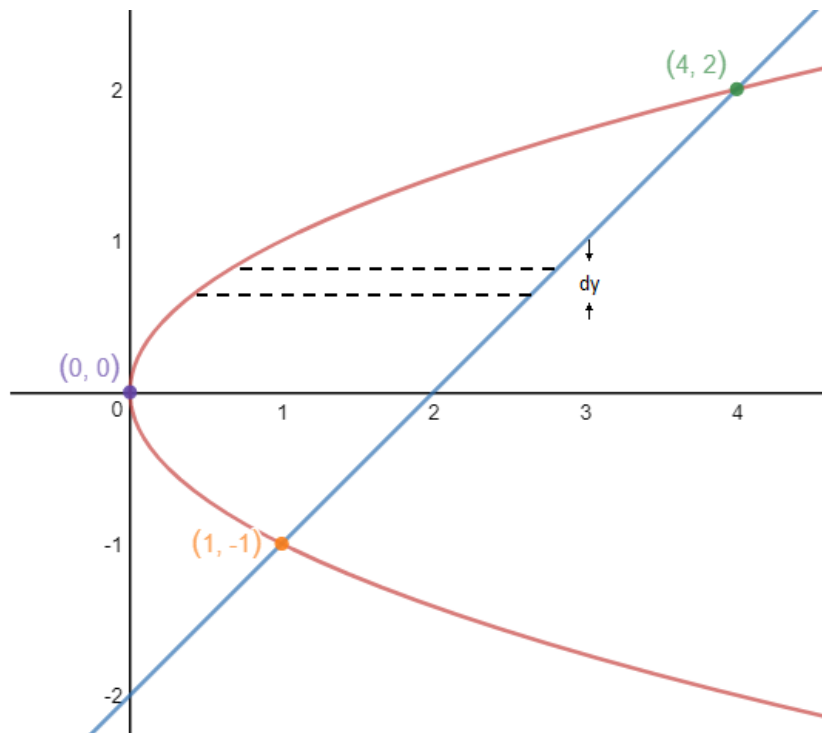
$$S_{right} = \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx$$

左侧的面积由 $y = x^{1/2}$ 和 $y = -x^{1/2}$ 围成:

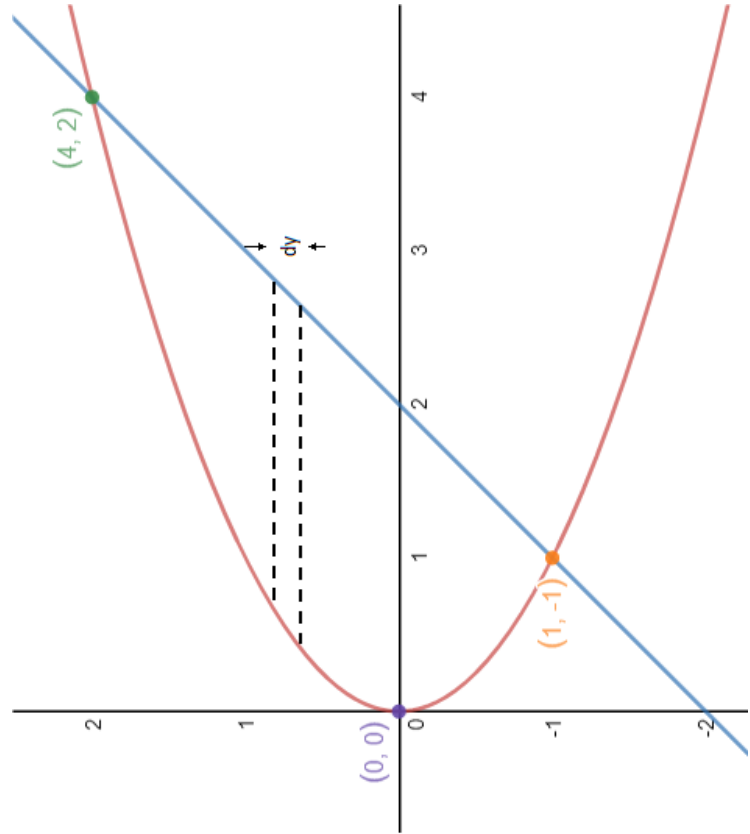
$$S_{left} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx$$

$$S = S_{left} + S_{right} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx$$

现在换一种更简单的解法, 我们尝试横向切割矩形:



这需要将原函数变为 x 关于 y 的函数, 相当于将图像逆时针旋转90度:

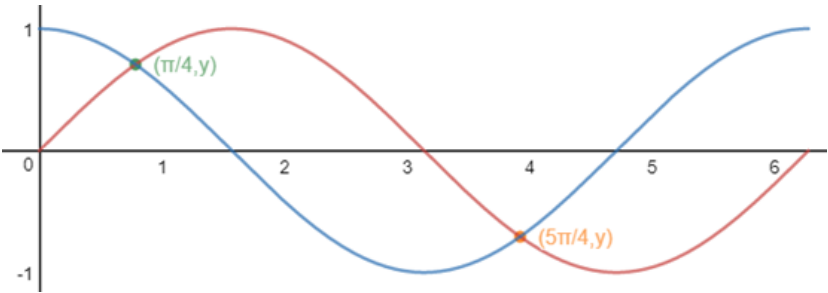


一切都清晰了。

$$S = \int_{-1}^2 ((y + 2) - y^2) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

示例2

计算下图sinx和cosx前两次相交所围成的面积



$$S = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

由此可见，定积分可以计算我们过去无法计算的面积。

总结

- $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

1. 可以看作对数的定义，从而解释对数的各个性质。

- $$\text{Area} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

2. 可以使用 计算两条曲线所围的面积。

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [定积分的应用](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [概率笔记1——独立事件下的简单概率](#)
» 下一篇: [疯狂!!!](#)

posted on 2017-11-03 20:47 我是8位的 阅读(1977) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

yozodcs.com

广告

×

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情

- 编辑推荐：
- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
 - 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
 - ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
 - .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
 - 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes